قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

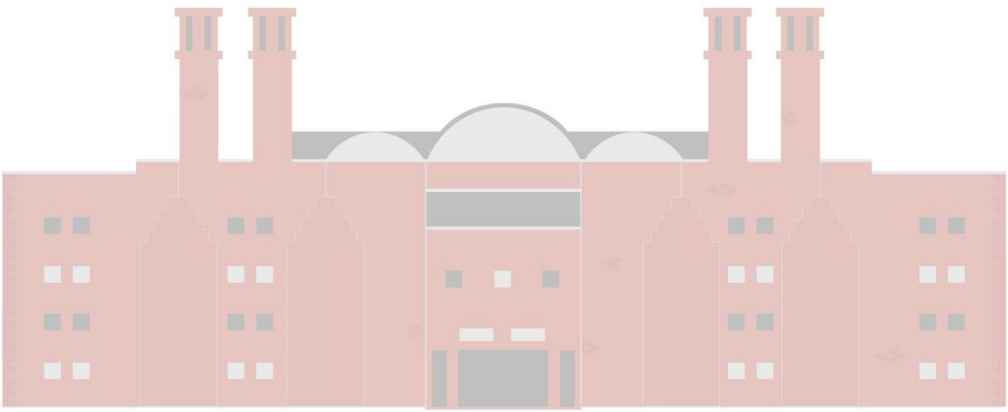
السنة الثانية / الفصل الأول

RED BUILDING TEAM

التحليل العددي

المحاضرة السابع عشر

4 صفحات



الدكتور: عماد فتاش

التاريخ: ٢٠١٤/١١/٢٧

الاشتقاق العددي:

$$\Delta x = h_k$$

$$\begin{cases} D_x = \dfrac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k} \\ k = 1, 2, 3, \dots \dots \end{cases}$$

مثال:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x \Rightarrow f(x=1) = e = 2.7182818285$$

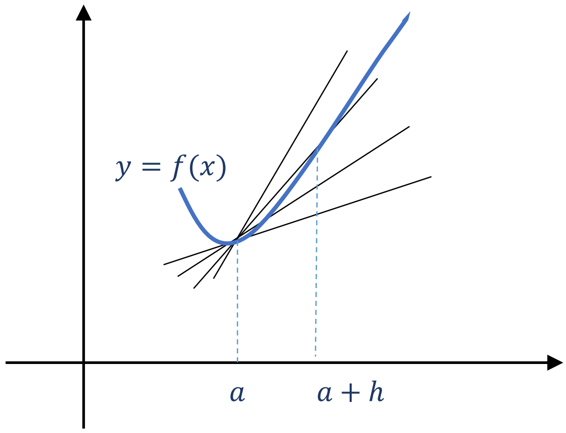
إذاً نحن هنا نشكل متتالية: $\{D_x\}_1^\infty$

وستكون الـ D_x في مثالنا السابق:

$$D_k = \frac{f(1+h_k) - f(1)}{h_k}$$

h_x	$f_x = f(1+h_x)$	$f_x = e$	$D_x = [f_k - e]/h_x$
0.1	3.004166024	0.285884196	2.858841960
0.01	2.745601015	0.027319187	2.731918700
0.001	2.721001470	0.002719642	2.719642000
10^{-4}	2.718553670	0.000271842	2.71842000
10^{-5}	2.718309011	0.000027183	2.7183000
10^{-6}	....	....	2.7190000
10^{-7}	....	....	2.720000
10^{-8}	....	....	2.800000
10^{-9}	....	....	3.0000000
10^{-10}	....	....	00000000

إن هذه الحسابات تُمثّل تقريباً حساب لميل مستقيمات متقاطعة مع المنحني وكلما صغرت هذه المقادير كلما اقتربنا من حساب ميل المماس



إن الشرط لكي يعطينا القيمة التقريبية الأفضل للمشتق هي أن تحقق قيمة الـ D_k للمتراجحة التالية:

$$|D_{N+1} - D_N| \geq |D_N - D_{N-1}|$$

وفي مثالنا السابق:

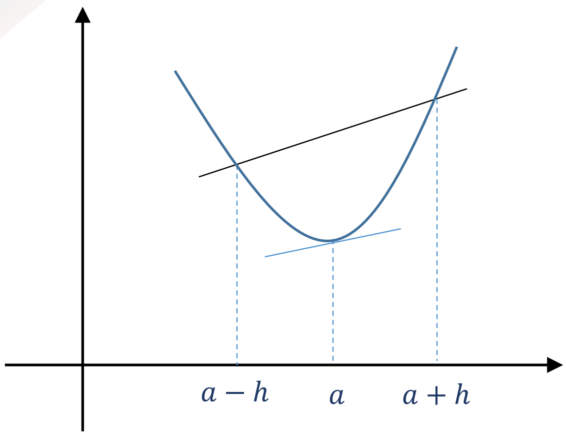
$$|D_6 - D_5| \geq |D_5 - D_4|$$

محققة لهذا الشرط وبالتالي $\Leftarrow$ D_5 هي القيمة الأفضل.

الصيغ التقريبية في حساب المشتق الأول:

- الصيغ التقدمية (احادية الجانب تقدمي) : $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- الصيغ التراجعية (أحادي الجانب تراجعي): $f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$
- صيغة الفرق المركزي : $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

تقريب للمشتق بصيغة الفرق المركزي



ملاحظة :

أن هذه الطريقة هي أفضل الطرق لحساب المشتق التقريبي .

مثال :

اوجد المشتق ... $f(x) = \cos x \quad , x = \frac{\pi}{3} \quad , f'\left(\frac{\pi}{3}\right)?$

علماً أن: $\begin{cases} h_k = 10^{-k} \\ k = 1,2,3,4 \end{cases}$

الحل:

سنستخدم الصيغة التقدمية : $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}+h\right) - \cos\frac{\pi}{3}}{h}$

$$h_1 = 0,1 \quad , f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx -0,8956196$$

$$h_2 = 10^{-2}, \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx -0.86851095$$

$$h_3 = 10^{-3} \quad , f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx -0.86627526$$

$$h_4 = 10^{-4} \quad , f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx -0.86605040$$

نقارن القيم السابقة بالقيمة الفعلية ..ونوجد القيمة الفعلية بايجاد مشتق التابع وتعويض النقطة المعطاة فيه ونقارن النتيجة مع القيم التي تم حسابها سابقا بالقانون السابق ..والقيمة الأكثر دقة وقربا من النتيجة تكون هي الأفضل والمناسبة لقيمة المشتق ....

$$f'(x) = -\sin x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -0,8660254 \ldots ....$$

وإننا نجد ان من أجل h_4 هي القيمة التقريبة الأفضلية .

مثال:

2,0	1,5	1,0	0,5	0,0	t
59.051	41,075	26,335	11,860	0,0	v

اوجد المشتق للسرعة باستخدام الصيغة المركزية

$$\begin{cases} t = 1.0 \\ t = 1.75 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'(1,0) \approx \dfrac{v(1.5) - v(0.5)}{1.0} = 29.215 \dfrac{m}{s^2} \end{cases}$$

ملاحظة : تم اختيار $h = 0.5$ بشكل يضمن استخدام معطيات التجربة وذلك بطرح القيمة التي تلي القيمة المطلوب حسابها من الجدول وطرحها منالقيمة المطلوب أي: $h = 1.5 - 1.0 = 0.5$

$$\begin{cases} v'(1,75) \approx \dfrac{v(2.0) - v(1.5)}{2 \times 0.25} \end{cases}$$

نلاحظ هنا ان القيمة المطلوب حساب مشتقها والتي هي $t = 1.75$ ليست موجودة في الجدول ولكن تقع مابين القيمتين 1.5 و2.0

فنحاول أن نجد قيمة لـ h تمكننا من الوصول الى القيمتين السابقتين لاستخدام صورهما في القانون وهنا نستنتج أن الـ h تساوي في هذه الحالة : $h = 2.0 - 1.75 = 0.25$.

"

When life puts you in tough situations

Don't say "why me"

Just say "try me"

;)

w.t